مع تحيات ..... * الاستاذ/ الرياضيات * السكشن الاول

{ ثانية تربية كيمياء }

• اثبت أن

① $1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{n}{2}(3n-1)$

البرهان

① العلاقة صحيحة عند $n=1$

$L.H.S=1=\frac{1}{2}(3-1)=1=R.H.S$

② نفرض أن العلاقة صحيحة عند $n=k$ . اى أن

$1+4+7+\cdots+(3k-2)=\frac{k}{2}(3k-1)$

③ نحاول اثبات ان العلاقة صحيحة عند $n=k+1$ أى أن

$1+4+7+\cdots+(3k-2)+(3k+1)=\frac{k+1}{2}(3k+2)$ ③

$$L.H.S=1+4+7+\cdots+(3k-2)+(3k+1)$$

$$=\frac{k}{2}(3k-1)+(3k+1)=\frac{1}{2}\left[3k^2-k+6k+2\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(3k^2+5k+2\right)=\frac{1}{2}(3k+2)(k+1)=R.H.S$$

من ①، ②، ③ ∴ العلاقة صحيحة لجميع قيم $n$ .

---

② $(1+2+3+\cdots+n)^2=\left(\frac{n}{2}\right)^2(n+1)^2$

الحل

نستطيع اثبات العلاقة $1+2+\cdots+n=\frac{n}{2}(n+1)$ بسهولة وذلك بالآتى

① نثبت أن العلاقة صحيحة عند $n=1$

$L.H.S=1=\frac{1}{2}(1+1)=1=R.H.S$

② نفرض ان العلاقة صحيحة عند $n=k$ اى أن

$(1+2+3+\cdots+k)=\frac{k}{2}(k+1)$

③ نحاول اثبات ان العلاقة صحيحة عند $n=k+1$ اى أننا نريد اثبات أن

$1+2+3+\cdots+k+k+1=\frac{k+1}{2}(k+2)$ .

②

$$L.H.S = \underbrace{1+2+3+\dots+k}+k+1$$

$$= \frac{k}{2}(k+1) + (k+1) = (k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$= R.H.S$$

∴ العلاقة صالحة لجميع قيم $n$ .

$$\therefore 1+2+\dots+n = \frac{n}{2}(n+1)$$

ومنها يمكن كتابة

$$(1+2+\dots+n)^2 = \left(\frac{n}{2}\right)^2 (n+1)^2 .$$

---

$\boxed{3}$ $1+3+6+\dots+\frac{n}{2}(n+1) = \frac{n}{6}(n+1)(n+2)$ .

proof.

① نثبت أن العلاقة صحيحة عند $n=1$

$$L.H.S = 1 = \frac{1}{6}(1+1)(1+2) = 1 = R.H.S.$$

② نفرض أن العلاقة صحيحة عند $n=k$ أي أن

$$1+3+6+\dots+\frac{k}{2}(k+1) = \frac{k}{6}(k+1)(k+2)$$

③ يجب اثبات أن العلاقة صحيحة عند $n=k+1$ اى أننا نريد اثبات أن

$$1+3+6+\dots+\frac{k}{2}(k+1)+\frac{k+1}{2}(k+2) = \frac{k+1}{6}(k+2)(k+3) .$$ ③

$$L.H.S = \underbrace{1+3+6+\dots+\frac{k}{2}(k+1)}+\frac{k+1}{2}(k+2)$$

$$= \frac{k}{6}(k+1)(k+2) + \frac{k+1}{2}(k+2) = (k+1)(k+2)\left[\frac{k}{6}+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6} = R.H.S.$$

∴ العلاقة صالحة لجميع قيم $n$ .

---

$\boxed{4}$ $1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + n \text{ terms} = \frac{n}{4}(n+1)(n+2)(n+3)$

الحل

اولاً لابد من تحديد الحد النوني

$$1.2.3+2.3.4+\dots+n(n+1)(n+2) = \dots$$

الحد النوني الذي يمكن استنتاجه اى هو

$$\therefore n \text{ Term} = n(n+1)(n+2)$$

∴ يمكن كتابة هذه العلاقة بالشكل

$$1.2.3 + 2.3.4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n}{4}(n+1)(n+2)(n+3).$$

① نثبت أن العلاقة صحيحة عند $n=1$

$$L.H.S = 1.2.3 = 6 = \frac{1}{4}(1+1)(1+2)(1+3) = 6 = R.H.S$$

② نفرض ان العلاقة صحيحة عند $n=k$ أي أن

$$1.2.3 + 2.3.4 + \dots + k(k+1)(k+2) = \frac{k}{4}(k+1)(k+2)(k+3).$$

③ فاعل اثبات أن العلاقة صحيحة عند $n=k+1$ اي أننا نريد اثبات أن

$$1.2.3 + 2.3.4 + \dots + k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)(k+3) = \frac{k+1}{4}(k+2)(k+3)(k+4)$$

$$L.H.S = \underbrace{1.2.3 + 2.3.4 + \dots + k(k+1)(k+2)} + (k+1)(k+2)(k+3)$$

$$= \frac{k}{4}(k+1)(k+2)(k+3) + (k+1)(k+2)(k+3)$$

$$= (k+1)(k+2)(k+3)\left[\frac{k}{4}+1\right] = \frac{1}{4}(k+1)(k+2)(k+3)(k+4) = R.H.S$$

∴ العلاقة صالحة لجميع قيم $n$ .

---

$\boxed{5}$ $1.3 + 3.3^2 + 5.3^3 + \dots + n\ term = (n-1)\,3^{n+1} + 3$

**الحل**

يمكن كتابة الحد النوني بالشكل

$$1.3 + 3.3^2 + 5.3^3 + \dots + (2n-1).3^n = (n-1)\,3^{n+1} + 3$$

① نثبت أن العلاقة صحيحة عند $n=1$

$$L.H.S = 1.3 = 0 + 3 = R.H.S$$

② نفرض أن العلاقة صحيحة عند $n=k$ أي أن

$$1.3 + 3.3^2 + \dots + (2k-1)\,3^k = (k-1)(3^{k+1}) + 3.$$

③ الحاول اثبات أن العلاقة صحيحة عند $n=k+1$ أي أن

$$1.3 + \dots + (2k-1)(3^k) + (2k+1)\,3^{k+1} = (k)\,3^{k+2} + 3.$$

??

c

$$L.H.S = 1.3 + 3.3^2 + \dots + (2k-1)3^k + (2k+1)3^{k+1}$$

$$= (k-1)3^{k+1} + 3 + (2k+1)3^{k+1}$$

$$= 3^{k+1}(k-1+2k+1) + 3 = 3k\,3^{k+1} + 3$$

$$= k\,3^{k+1} + 3 = R.H.S$$

∴ العلاقة صحيحة لجميع قيم $n$ .

---

$\boxed{6}$ $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}\ ,\ n > 1$

الحل

نلاحظ هنا أن $n>1$ أي ان البداية $n=2$

① لنثبت أن العلاقة صحيحة عند $n=2$

$$L.H.S = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = 1.7 > \sqrt{2} = R.H.S = 1.4$$

② نفرض أن العلاقة صحيحة عند $n=k$ أي أن

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k}$$

③ نحاول اثبات أن العلاقة صحيحة عند $n=k+1$ أي اننا نريد اثبات أن

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1} \quad ??$$

$$L.H.S = \frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

$$> \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k}(\sqrt{k+1}) + 1}{\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k^2+k} + 1}{\sqrt{k+1}}$$

$$> \frac{\sqrt{k^2} + 1}{\sqrt{k+1}} = \frac{k+1}{\sqrt{k+1}} = \sqrt{k+1} = R.H.S$$

∴ العلاقة صحيحة لجميع قيم $n$ .

$\boxed{7}$ اثبت أن $f(n)=2^{4n}-1$ تقبل القسمة على 15

الحل

① العلاقة صحيحة عند $n=1$ نلاحظ أن $f(1)=2^4-1=15$ تقبل القسمة على 15

② نفرض أن العلاقة صحيحة عند $n=k$ أي أن $f(k)=2^{4k}-1$ تقبل القسمة على 15
اي يمكن كتابتها بالشكل

$$f(k)=2^{4k}-1=15m\ ,\ m\in \mathbb{Z}$$

③ نحاول اثبات أن $f(k+1)=2^{4k+4}-1$ تقبل القسمة على 15

$$\therefore f(k+1)=2^{4k}\cdot 2^4-1=2^4(2^{4k}-1)+2^4-1$$
$$=2^4(2^{4k}-1)+15$$
$$=15m\cdot 2^4+15=15(2^4m+1)$$
$$=15w\ ,\ w\in \mathbb{Z}$$

أي أن $f(k+1)$ تقبل القسمة على 15.
اي أن العلاقة صحيحة لجميع قيم $n$.

---

⑧ اثبت أن $f(n)=3^{2n}+7$ تقبل القسمة على 8

الحل

بالحل: ① العلاقة صحيحة عند $n=1$ لأن $f(1)=3^2+7=16$

② نفرض أن العلاقة صحيحة عند $n=k$ اي يمكن كتابة

$$f(k)=3^{2k}+7=8m\ ,\ m\in \mathbb{Z}.$$

③ نثبت ان العلاقة صحيحة عند $n=k+1$ اي أن

$$f(k+1)=3^{2k+2}+7=3^{2k}\cdot 3^2+7=9\cdot 3^{2k}+7$$
$$=9\cdot(3^{2k}+7)-63+7=9\cdot(8m)-56$$
$$=8[9m-7]=8w\ ,\ w\in \mathbb{Z}$$

$\therefore$ العلاقة صحيحة لجميع قيم $n$

[4] اثبت أن $f(n)=(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n$ تقبل القسمة على 2

<u>الحل</u>

[1] نثبت أن العلاقة صحيحة عند $n=1$ ⇐ $f(1)=(3+\sqrt{5}+3-\sqrt{5})=6$

[2] نفرض أن العلاقة صحيحة عند $n=k$ أي أن $f(k)=(3+\sqrt{5})^k+(3-\sqrt{5})^k$
تقبل القسمة على 2 أي أنها على الشكل

$$f(k)=(3+\sqrt{5})^k+(3-\sqrt{5})^k=2m\,,\quad m\in\mathbb{Z}.$$

[3] فاعل اثبات أن العلاقة صحيحة عند $n=k+1$

$$f(k+1)=(3+\sqrt{5})^{k+1}+(3-\sqrt{5})^{k+1}=(3+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})^k+(3-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})^k$$

$$=(3+\sqrt{5})\left[(3+\sqrt{5})^k+(3-\sqrt{5})^k\right]-(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})^k+(3-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})^k$$

$$=(3+\sqrt{5})[2m]-(3-\sqrt{5})^k\left[(\cancel{3}+\sqrt{5})-\cancel{3}+\sqrt{5}\right]$$

$$=(3+\sqrt{5})(2m)-(3-\sqrt{5})^k(2\sqrt{5})$$

$$=2\left[m(3+\sqrt{5})-(3-\sqrt{5})^k\sqrt{5}\right]=2\cdot w$$

∴ $f(k+1)$ تقبل القسمة على 2

∴ العلاقة صحيحة لجميع قيم $n$ .

---

(10) اثبت $(\cos x+i\sin x)^n=\cos(nx)+i\sin(nx)$

<u>الحل</u>

① العلاقة صحيحة عند $n=1$ ⇐ $L.H.S=R.H.S.$

② نفرض أن العلاقة صحيحة عند $n=k$ أي أن

$$(\cos x+i\sin x)^k=\cos(kx)+i\sin(kx).$$

③ نثبت أن العلاقة صحيحة عند $n=k+1$ أي أن

$$(\cos x+i\sin x)^{k+1}=\cos(k+1)x+i\sin(k+1)x.$$

$$\underline{L.H.S}=(\cos x+i\sin x)^{k+1}=(\cos x+i\sin x)^k\cdot(\cos x+i\sin x)$$

$$=(\cos x+i\sin x)(\cos kx+i\sin kx)$$

تابع

7

$$\text{L.H.S} = \cos x \cos(kx) + i^2 \sin(kx)\sin x + i\left[\cos x \sin kx + \sin x \cos kx\right]$$

$$= \left[\cos x \cos kx - \sin kx \sin x\right] + i\left[\cos x \sin kx + \sin x \cos kx\right].$$

$$= \cos(kx + x) + i \sin(kx + x)$$

$$= \cos(k+1)x + i \sin(k+1)x = \text{R.H.S}.$$

∴ العلاقة صحيحة لجميع قيم $n$.

---

(11) $\frac{d^n}{dx^n}(\sin x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

الحل

① العلاقة صحيحة عند $n = 1$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \checkmark$$

② نفرض أن العلاقة صحيحة عند $n = k$ أي أن،

$$\frac{d^k}{dx^k}(\sin x) = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right).$$

③ نثبت أن العلاقة صحيحة عند $n = k+1$ اي أننا نريد اثبات أن

$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}(\sin x) = \sin\left(x + \frac{(k+1)\pi}{2}\right).$$

$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^k}{dx^k}\right] = \frac{d}{dx}\left(\sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)\right) = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$$

$$= \sin\left(x + \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{(k+1)\pi}{2}\right)$$

$$= \text{R.H.S}$$

∴ العلاقة صحيحة لجميع قيم $n$.

---

(12) $\frac{d^n}{dx^n}(\cos x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

① $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

② $\frac{d^k}{dx^k}(\cos x) = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$

③ $\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}(\cos x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^k}{dx^k}\cos x\right) = \frac{d}{dx}\left(\cos\left(x + \frac{\pi k}{2}\right)\right) = -\sin\left(x + \frac{\pi k}{2}\right)$

$$= \cos\left(x + \frac{(k+1)\pi}{2}\right) = \text{R.H.S}$$

∴ العلاقة صحيحة لجميع $n$

Section: 2 — الكسور الجزئية :

مثال ① حلل الكسر التالي الى كسوره الجزئية :

$$\frac{x}{(x+1)(x+3)(x+4)}$$

الحل

$$\frac{x}{(x+1)(x+3)(x+4)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+3)} + \frac{C}{(x+4)}$$

بتوحيد المقام ومساواة البسط بالبسط والمقام بالمقام نجد .

$$\Rightarrow A(x+3)(x+4) + B(x+1)(x+4) + C(x+1)(x+3) = x$$

هذه العلاقة صالحة لجميع قيم $x$.

- at $x=-1 \Rightarrow A(2)(3) = -1 \Rightarrow A = \frac{-1}{6}$.
- at $x=-3 \Rightarrow 0 + B(-2)(1) = -3 \Rightarrow B = \frac{3}{2}$.
- at $x=-4 \Rightarrow 0 + 0 + C(-3)(-1) = -4 \Rightarrow C = \frac{-4}{3}$.

$$\therefore \frac{x}{(x+1)(x+3)(x+4)} = \frac{\left(\frac{-1}{6}\right)}{(x+1)} + \frac{3/2}{x+3} + \frac{-4/3}{(x+4)}$$

مثال ② حلل الكسر التالي الى كسوره الجزئية

$$\frac{2}{(x+1)(x^2+3)} = ??$$

الحل

$$\frac{2}{(x+1)(x^2+3)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{Bx+C}{x^2+3} \Rightarrow A(x^2+3) + (Bx+C)(x+1) = 2$$

- at $x=-1 \Rightarrow A(4) = 2 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$
- at $x=0 \Rightarrow A(3) + C(1) = 2 \Rightarrow \frac{3}{2} + C = 2 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$
- at $x=1 \Rightarrow A(4) + (B+C)(2) = 2 \Rightarrow \frac{1}{2}(4) + (\frac{1}{2}+B)2 = 2$

$$\Rightarrow 2 + 1 + 2B = 2 \Rightarrow B = \frac{-1}{2}$$

$$\therefore \frac{2}{(x+1)(x^2+3)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{(x+1)} + \frac{\left(\frac{-1}{2}x+\frac{1}{2}\right)}{x^2+3}$$

تمرين 3: حلل الكسر التالي الى كسوره الجزئية:

$$\frac{x^2-1}{(x+2)(x^2+1)}$$

الحل

$$\frac{x^2-1}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)}$$

نوحد المقام ومساواة البسط بالبسط والمقام بالمقام ينتج:

$$* \quad A(x^2+1) + (Bx+C)(x+2) = x^2-1$$

هذه العلاقة صالحة لجميع قيم $x$:

$$* \text{ at } x=-2 \Rightarrow A(5)+0 = 4-1 = 3 \Rightarrow A = 3/5$$

$$* \text{ at } x=0 \Rightarrow A + C(2) = -1 \Rightarrow \frac{3}{5} + 2C = -1$$

$$\Rightarrow 2C = \frac{-8}{5} \Rightarrow C = \frac{-4}{5}$$

$$* \text{ at } x=1 \Rightarrow A(2) + 3(B+C) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{6}{5} + 3B - \frac{12}{5} = 0 \Rightarrow 3B = \frac{6}{5} \Rightarrow B = \frac{2}{5}$$

$$\therefore \frac{x^2-1}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{3/5}{x+2} + \frac{(2/5)x-(4/5)}{x^2+1}.$$

تمرين 4: حلل الكسر التالي الى كسوره الجزئية:

$$\frac{6x^2-30x+36}{(3+2x)(5-2x)^3}$$

الحل

$$\frac{6x^2-30x+36}{(3+2x)(5-2x)^3} = \frac{A}{(3+2x)} + \frac{B}{(5-2x)} + \frac{C}{(5-2x)^2} + \frac{D}{(5-2x)^3}$$

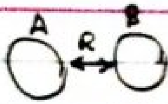
$$\Rightarrow A(5-2x)^3 + B(3+2x)(5-2x)^2 + C(3+2x)(5-2x) + D(3+2x)$$

$$= 6x^2-30x+36$$

ونكمل.

## العلاقات

$R = \{(a,b) : a \in A , b \in B\}.$




**أنواع العلاقات :**

① عاكسة : $\forall a \in A \Rightarrow (a,a) \in R.$

② متماثلة : $\forall (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R.$

③ ناقلة : $\forall (a,b),(b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$

إذا كانت العلاقة عاكسة، متماثلة وناقلة تسمى علاقة تكافؤ .

---

**تمرين ①:** إذا كانت $X=\{1,2,3,4\}$ ، $R$ معرفة كالآتي :

$R=\{(1,1),(2,2),(1,2),(2,3),(1,3)\}.$

ادرس العلاقة $R$

**الحل.**

[1] العلاقة ليست عاكسة وذلك لأن

$\{3\} \in X , (3,3) \notin R$ and $4 \in R$ but $(4,4) \notin R.$

[2] العلاقة ليست متماثلة لأن $(1,3) \in R$ ولكن $(3,1) \notin R$ .

③ العلاقة ناقلة وذلك لأن $\forall (a,b),(b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R.$

Ex: $(1,2),(2,3) \in R \Rightarrow (1,3) \in R.$

من ①، ②، ③ العلاقة ليست علاقة تكافؤ .

---

**تمرين ②:** ادرس العلاقة : $R=\{(a,b) : a,b \in \mathbb{N} , b=3a\}.$

**الحل**

① العلاقة ليست عاكسة لأن

$\forall a \in \mathbb{N} \Rightarrow a \neq 3a \Rightarrow (a,a) \notin R.$

② العلاقة ليست متماثلة لأن

$\forall (a,b) \in R \Rightarrow b = 3a \Rightarrow a \neq 3b \Rightarrow (b,a) \notin R$

(11)

③ العلاقة ليست ناقلة لأن

If $(a,b),(b,c) \in R \Rightarrow c = 3b,\ b = 3a \Rightarrow c = 9a \Rightarrow (a,c) \notin R$.

∴ العلاقة ليست علاقة تكافؤ.

تمرين ③: ادرس العلاقة:

$R = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{Z} ;\ a^2 = b^2\}$.

الحل

① العلاقة عاكسة لأن

$\forall a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a^2 = a^2 \Rightarrow (a,a) \in R$.

② العلاقة متماثلة لأن

If $(a,b) \in R \Rightarrow a^2 = b^2 = b^2 = a^2 \Rightarrow (b,a) \in R$.

③ العلاقة ناقلة لأن

If $(a,b),(b,c) \in R \Rightarrow a^2 = b^2,\ b^2 = c^2$

$\Rightarrow a^2 = c^2 \Rightarrow (a,c) \in R$

من ①، ②، ③ ∴ العلاقة علاقة تكافؤ.

تمرين ④: ادرس

$R = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R},\ b \geq a\}$.

الحل

① العلاقة عاكسة لأن

$\forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow a \geq a \Rightarrow (a,a) \in R$

② العلاقة ليست متماثلة لأن

if $(a,b) \in R \Rightarrow b \geq a$ but $a \ngeq b \Rightarrow (b,a) \notin R$.

③ العلاقة ناقلة لأن:

if $(a,b),(b,c) \in R \Rightarrow b \geq a,\ c \geq b$

$\Rightarrow c \geq a \Rightarrow (a,c) \in R$

من ② العلاقة ليست علاقة تكافؤ.

تمرين ⑤: ادرس

$R = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{Z},\ a < b\}$.

الحل

① العلاقة ليست عاكسة لأن

$\forall a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \nless a \Rightarrow (a,a) \notin R$

② العلاقة ليست متماثلة لأن

if $(a,b) \in R \Rightarrow a < b$ but $b \nless a$

i.e $(b,a) \notin R$.

3) العلاقة ناقلة

if $(a,b),(b,c) \in R \Rightarrow a < b,\ b < c \Rightarrow a < c$

$\Rightarrow (a,c) \in R$

العلاقة ايضا علاقة تكافؤ.

مثال 4: المثال

$R = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{Z},\ ab \geq 0\}.$

الحل

1) العلاقة انعكاسية

$\forall a \in \mathbb{Z} \Rightarrow aa = a^2 \geq 0 \Rightarrow (a,a) \in R.$

2) ⇐ تماثلية

if $(a,b) \in R \Rightarrow ab \geq 0 \Rightarrow ba \geq 0 \Rightarrow (b,a) \in R.$

3) ⇐ ناقلة

If $(a,b),(b,c) \in R \Rightarrow a.b \geq 0 \wedge b.c \geq 0$

i.e

اما $a \geq 0$ , $b \geq 0$ , $b \geq 0$ , $c \geq 0 \Rightarrow a \geq 0, c \geq 0$

$a \leq 0$ , $b \leq 0$ , $b \leq 0$ , $c \leq 0 \Rightarrow a \leq 0, c \leq 0$

$\Rightarrow a.c \geq 0 \Rightarrow (a,c) \in R$

من 1، 2، 3 ∴ العلاقة علاقة تكافؤ.

مثال 5: المثال

$R = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{Z};\ a \neq b\}.$

الحل

1) العلاقة ليست انعكاسية لان

$\forall a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a = a \Rightarrow (a,a) \notin R.$

2) ∴ تماثلية

if $(a,b) \in R \Rightarrow a \neq b \Rightarrow b \neq a \Rightarrow (b,a) \in R$

3) ∴ ناقلة

if $(a,b) \in R, (b,c) \in R$

$\Rightarrow a \neq b,\ b \neq c \Rightarrow a \neq c \Rightarrow (a,c) \in R$

العلاقة ليست علاقة تكافؤ.

تمت بحمد الله

Section : 4 المحددات والمصفوفات .

* المصفوفة : هي عبارة عن ترتيب لمجوعة من الاعداد ( العناصر ) على شكل صفوف واعمدة .
ويرمز لها بالرمز

$[A_{ij}]$ or $(A_{ij})$

* العمليات على المصفوفات :

١- تساوي مصفوفتان : يقال أن المصفوفتان A , B متساويتان إذا تحققت الشروط .

- رتبة المصفوفة A = رتبة المصفوفة B .
- العناصر المتناظرة متساوية .

٢- جمع ( طرح ) المصفوفتان :
إذا كانت A ، B مصفوفتان لهما نفس الرتبة فإن جمع ( طرح ) المصفوفتان هو عبارة عن جمع ( طرح ) العناصر المتناظرة في كلتا المصفوفتان .

٣- ضرب المصفوفات :
لكي تكون المصفوفتان A,B قابلتين للضرب AB لا بد وان يكون عدد صفوف المصفوفة A = عدد اعمدة المصفوفة B .

* انواع المصفوفات :

١- المصفوفة الصفرية : هي مصفوفة جميع عناصرها اصفار .
2- " القطرية : هي مصفوفة مربعه جميع عناصرها اصفار فيما عدا القطر الرئيسي .
3- " المثلثية :.
أ- المصفوفة المثلثية العليا : هي مصفوفة مربعة عناصرها اسفل القطر الرئيسي كلها اصفار .
ب- المصفوفة المثلثية السفلى : هي مصفوفة مربعه عناصرها اعلى القطر الرئيسي كلها اصفار .
4- مصفوفة الوحدة : هي مصفوفة مربعه عناصر قطرها الرئيسي كلها 1 - بينما باقي العناصر كلها اصفار .

ملاحظة : حاصل ضرب اي مصفوفة في مصفوفة الوحدة يعطي نفس المصفوفة .

14

تمرين ① بفرض أن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

اوجد $A+B$ ، $A-B$ ، $B-A$ ، $AB$ ، $BA$ .

الحل

$$A+B = \begin{bmatrix} 1+(-2) & 2+3 & 1+5 \\ 3+1 & -2+1 & 5+2 \\ 1+0 & 0+3 & 3+(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 6 \\ 4 & -1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2)+2+0 & (3+2+3) & (5+4-1) \\ -6-2+0 & 9-2+15 & 3+0+9 \\ -2+0+0 & 15-4-5 & 5+0-3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 8 & 8 \\ -8 & 22 & 12 \\ -2 & 6 & 2 \end{bmatrix} .$$

تمرين ② اوجد قيم $a, b$ التي تحقق

$$\begin{bmatrix} 1 & a+b \\ a-b & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل

∵ المصفوفتان متساويتان اذن

$$\left.\begin{matrix} a+b = 2 \\ a-b = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2a = 5 \Rightarrow a = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow 2b = -1 \Rightarrow \boxed{b = \frac{-1}{2}} .$$

تمرين : اوجد معكوس المصفوفات الاتية :

① $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = A$ **Sol:** $|A| = 4-6 = -2$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} +4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

② $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ **Sol:**

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(9-8) - (18-4) + 4(12-3)$$

$$= 2 - 14 + 36 = 24$$

مصفوفة المرافقات

$$\bar{A} = \begin{vmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (9-8) & -(18-4) & (12-3) \\ -(3-8) & (6-4) & -(4-1) \\ (4-12) & -(8-24) & (6-6) \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -14 & 9 \\ +5 & 2 & -3 \\ -8 & 16 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\bar{A})^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -8 \\ -14 & 2 & 16 \\ 9 & -3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\bar{A})^T$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} 1 & 5 & -8 \\ -14 & 2 & 16 \\ 9 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

**تمرين** : حل المعادلات الخطية التالية باستخدام المحددات (كرامر).

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x + 3y - 4z &= 1 \\ 3x + 4y + z &= 8 \end{aligned}\right\} (*)$$

الحل

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= (3-(-16)) - (2-(-12)) + (8-9)$$

$$= 19 - 14 - 1 = 4.$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \\ 8 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 3(3-(-16)) - (1-(-32)) + (4-24)$$

$$= 3(19) - 33 + (-20)$$

$$= 57 - 53 = 4$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 1(1-(-32)) - 3(2-(-12)) + (16-3)$$

$$= 33 - 3(14) + 13 = 33 - 42 + 13$$

$$= 4$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (24-4) - (16-3) + 3(8-9)$$

$$= 20 - 13 - 3 = 4$$

4

$$\therefore x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{4}{4} = 1 , \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{4}{4} = 1 , \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{4}{4} = 1$$

تمرين: اوجد حل المعادلات السابقة باستخدام المصفوفات ؟؟

الحل

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix} , \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$, \ |A| = 4$$

تم حسابها في المثال السابقة

:- تكملة حساب ← ص 6

مصفوفة المرافق =

$$\bar{A} = \begin{vmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (3-(-16)) & -(2-(-12)) & (8-9) \\ -(1-4) & (1-3) & -(4-3) \\ (-4-3) & -(-4-2) & (3-2) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 19 & -14 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -7 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\frac{1}{|A|}(\bar{A})^T = A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 19 & 3 & -7 \\ -14 & -2 & 6 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 19 & 3 & -7 \\ -14 & -2 & 6 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (19)(3) + 3 - 7(8) \\ (-14)(3)(-2)(1) + 6(8) \\ -3 - 1 + 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

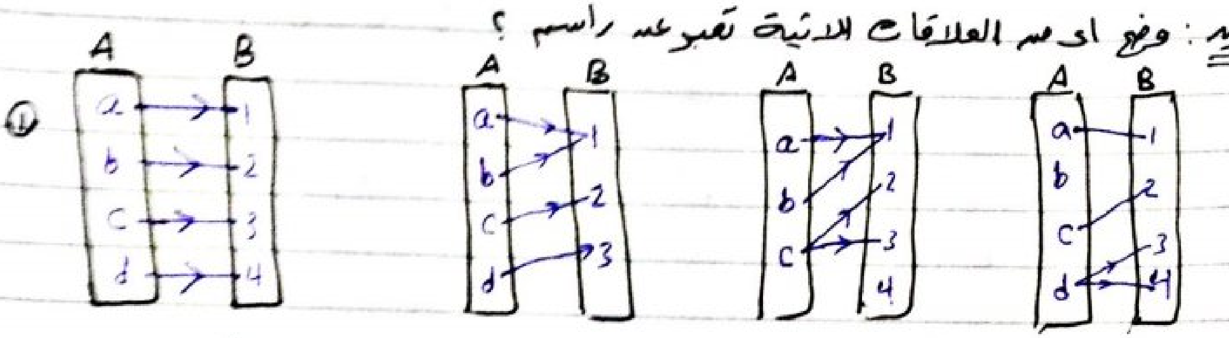
$x = 1, \quad y = 1, \quad z = 1$

# الرواســـم

عنصر عنصر

* الراسم : هو عبارة عن علاقة تربط بين مجموعة A الى مجموعة B بحيث ان كل عناصر المجموعة A يناظرها عنصر واحد من عناصر المجموعة B .
* وتسمى عناصر المجموعة A بالمجال وعناصر المجموعة B بالمجال المقابل .

تمرين : وضح اى من العلاقات الاتية تعبر عن راسم ؟

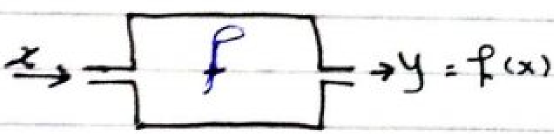



راسم     راسم     ليس راسم     ليس راسم .

لتعريف الراسم يلزم تعريف المجال والمجال المقابل و صيغة الراسم الرياضية

$f : A \to B \quad ; \quad f(x) = y.$

الراسم يشبه الماكينه بحيث انه يدخل $x$ يخرج $y = f(x)$




ملاحظة : إذا عرفنا الراسم :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = x^2$$

في هذه الحالة :

$$f(1) = 1^2 = 1 \quad , \quad f(3) = 3^2 = 9. \quad , \quad f(n) = n^2$$

$$f(2x) = (2x)^2 \quad , \quad f(1000x) = (1000x)^2 \quad , \ldots$$

* تركيب الرواسم :

إذا كان الراسمين $(f, g)$    $(g \circ f)(x)$   or   $f \circ g(x)$

**تعريف:** $(f\circ g)(x) = f(g(x))$ , $(g\circ f) = g(f(x))$ .

**مثال:** اذا كان

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ , $g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ راسمين .

and $f(x) = 3x \ \forall x \in \mathbb{R}$ , $g(x) = 2x^2+5 \ \forall x \in \mathbb{R}$

اوجد

$f\circ g$ , $g\circ f$

**الحل**

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x^2+5) = 3(2x^2+5)$$
$$= 6x^2+15 \to ①$$

$$g\circ f = g(f(x)) = g(3x) = 2(3x)^2+5$$
$$= 2[9x^2]+5 = 18x^2+5 \to ②$$

نجد ان

$f\circ g \neq g\circ f$ على وجه العموم.

**إذن:** $f\circ g = (g\circ f)(x)$ على وجه العموم (خطأ.)

---

* **انواع الرواسم:** [1] الراسم الاحادى one to one.

$f(x)$ احادى

if $\forall x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

**or**

if $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

**على سبيل المثال:**

① $f(x) = 3x+4$ , $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} , f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1+4 = 3x_2+4$$
$$\Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$\therefore f$ راسم احادى .

② الراسم الفوقي :

$f: X \to Y$

$\forall y \in Y \ \exists x \in X : y = f(x)$

ملاحظة : اذا كان الراسم راسم (احادي ، فوقي) ليسمى راسم تناظر احادي .

امثلة

* ادرس الرواسم الاتية :

① $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ , \ f(x) = ax + b \ , \ a \neq 0$

الحل

ⓐ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow a x_1 + b = a x_2 + b$
$\Rightarrow a x_1 = a x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

∴ $f$ راسم احادي

ⓑ $\forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow y = ax + b \Rightarrow ax = y - b \Rightarrow x = \frac{y-b}{a} \in \mathbb{R}$

and $f(x) = a\left[\frac{y-b}{a}\right] + b = (y-b) + b = y.$

∴ $f$ راسم فوقي

من ⓐ ⓑ ∴ الراسم تناظر احادي .

② $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \ , \ f(x) = x^2$

الحل

ⓐ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2$

∴ $f$ ليس راسم احادي .

(b) $\forall y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$ ~~$\notin \mathbb{Z}$~~

لانه

$-3 \in \mathbb{Z}$ but $x = \sqrt{-3} \notin \mathbb{Z}$

∴ $f$ ليس راسم فوقي

3) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ، $f(x) = x^2$

(a) → ليس احادي

(b) $\forall y \in \mathbb{N} \Rightarrow x = \sqrt{y} \in \mathbb{N}$

∴ f راسم فوقي ، ليس تناظر احادي لانه ليس احادي.

4) اذا كان $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ، $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ راسمين معرفين كالاتي

$f(x) = 3x + 5$ ، $g(x) = 2x - 7$

اثبت ان $g \circ f$ تناظر احادي.

الحل

$h = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x+5) = 2(3x+5) - 7$

$= 6x + 10 - 7 = 6x + 3$

(a) $h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow 6x_1 + 3 = 6x_2 + 3 \Rightarrow \boxed{x_1 = x_2}$

(b) $\forall y \in \mathbb{R}$ $y = 6x + 3 \Rightarrow x = \frac{y-3}{6} \in \mathbb{R}$

$h(x) = 6\left(\frac{y-3}{6}\right) + 3 = y$.

∴ h تناظر احادي.